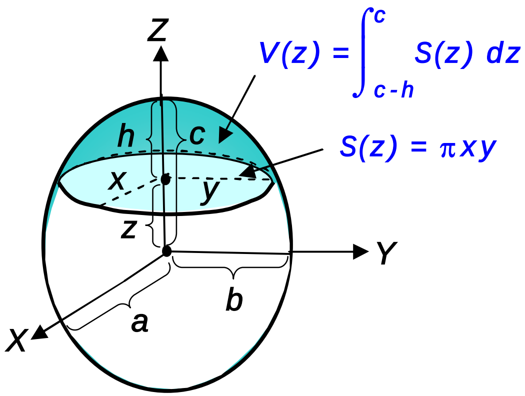
2012. 2. 29.　　keisan

一部が欠けた楕円体の体積の求め方



楕円面の方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

X軸に沿った楕円の方程式 (y=0)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}$$

Y軸に沿った楕円の方程式 (x=0)

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}$$

Z軸に垂直な楕円の面積

$$S(z)=\pi xy$$

$$=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

一部が欠けた楕円体の体積

$$V(z)=\int_{c-h}^{c} S(z)dz=\int_{c-h}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz$$

$$=\pi ab\left\{c-\frac{c^3}{3c^2}-(c-h)+\frac{(c-h)^3}{3c^2}\right\}$$

$$=\frac{\pi abh^2}{3c^2}(3c-h)$$

楕円体の体積

$$V(z)=\int_{-c}^{c} S(z)dz=\int_{-c}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz$$

$$=\frac{4\pi abc}{3}$$